Taller (virtual) 13 de marzo de 2020

Problema 1. Consideremos la sucesión de enteros positivos:

$$\{u_j\}, \text{ donde } u_1 = 1, \cdots, u_{j+1} = u_j(u_j + 1), \ j \geq 1$$

Y consideremos también la ecuación diofántica:

$$E(k): \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_k} = 1$$

Probar que:

a. Para cada entero positivo k la k –tupla: $(u_1 + 1, \ u_2 + 1, \cdots, \ u_{k-1} + 1, u_k)$ es una solución de la ecuación diofántica anterior, es decir, se verifica:

$$\frac{1}{u_1 + 1} + \frac{1}{u_2 + 1} + \cdots + \frac{1}{u_{k-1} + 1} + \frac{1}{u_k} = 1 \qquad (*)$$

b. Sea a un número perfecto con $n + 1$ divisores: $1, a_1, \cdots, a_n = a$
Probar que $a_1, \cdots, a_n$ es una solución de la ecuación diofántica E(n).

Problema 2. Probar que para cada dígito d, $2 \leq d \leq 9$, hay una infinidad de enteros naturales tales que si se traslada su cifra de las unidades a la posición de mayor orden (p. e., 12345 se convierte en 51234), entonces el número queda multiplicado por *d*. Calcular el entero más pequeño con la propiedad citada para *d=9*.

Problema 3. *(OM Italia 1986)*
Demuestra que para cada entero positivo *n* existe otro entero positivo *m* tal que

$$\left(\sqrt{2} - 1\right)^n = \sqrt{m} - \sqrt{m - 1}$$

Problema 4. *(OM Méjico 2012)*
Demuestra que dados cualesquiera 14 enteros consecutivos se pueden encontrar siempre 6 de ellos que son, dos a dos, primos entre sí.

Problema 5. *(Arhimede Math. Journal 2016)*
En un triángulo *ABC* se verifica:

$$\sqrt{\frac{\sin A}{\sin B \sin C}} + \sqrt{\frac{\sin B}{\sin A \sin C}} + \sqrt{\frac{\sin C}{\sin B \sin A}} = \sqrt{\frac{2R}{r}(\sin A + \sin B + \sin C)}$$

Donde *R y r* son los radios de las circunferencias circunscritas e inscritas, respectivamente.

Problema 6. *(OM Kazajistan 2015)*
Un rectángulo se dice inscrito en un triángulo si todos los vértices están en las caras del triángulo. Demuestre que el lugar de los centros de los rectángulos inscritos en un triángulo acutángulo son tres segmentos concurrentes en un punto.